

CORRECTION TD - MF1

EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Baromètre à mercure

☆☆☆

8488

La relation fondamentale de la statique des fluides (incompressible) entre B (le vide) et A (l'atmosphère) s'écrit :

$$P_A = P_B + \rho g h \Rightarrow P_{\text{atm}} = \rho g h$$

Ex. n°2 • Tube en U

☆☆☆

6015

On applique la loi de la statique des fluides dans les fluides incompressibles et homogènes, de chaque côté du tube, entre la surface libre et l'altitude de l'interface eau/huile.

$$P = P_0 + \rho_e g h = P_0 + \rho_h g H \Rightarrow h = \frac{\rho_h}{\rho_e} H = 12 \text{ cm}$$

Ex. n°3 • Barrage

☆☆☆

8066

Il faut intégrer la force élémentaire sur toute la hauteur du barrage.

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_0^H \rho g z L dz \vec{n} = \rho g L \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^H \vec{n} \Rightarrow \vec{F} = \frac{\rho g L H^2}{2} \vec{n}$$

Ex. n°4 • Fonte d'un glaçon

☆☆☆

1748

On donne les masses volumiques de la glace ρ_g et de l'eau ρ_e . On note V_{im} le volume immergé du glaçon à l'instant initial.

Un PFD à l'équilibre donne :

$$0 = -\rho_g V g + \rho_e V_{im} g \Rightarrow \rho_g V = \rho_e V_{im}$$

Une fois qu'il a entièrement fondu, le glaçon s'est transformé en eau liquide qui occupe un volume V_f tel que :

$$V_f = \frac{m_{\text{glaçon}}}{\rho_e} = \frac{\rho_g V}{\rho_e} = V_{im}$$

On voit que le glaçon une fois fondu occupe un volume total au volume initialement immergé. Le niveau de l'eau reste donc identique. Inutile de vider le verre.

Ex. n°5 • Bouchon d'évier

☆☆☆

9823

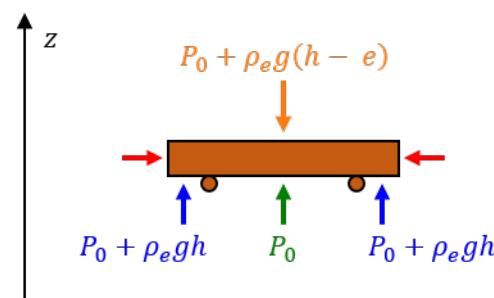
Attention, on ne peut pas directement appliquer la poussée d'Archimède car toutes les faces ne sont pas en contact avec l'eau. Il faut sommer à la main des forces de pression.

Le bouchon restera plaqué au fond si la résultante des forces qu'il subit est orientée vers le bas ($-\vec{u}_z$).

Il est soumis en l'occurrence à son poids :

$$\vec{P} = -\rho_{\ell} S e g \vec{u}_z$$

et aux forces de pression sur ses 3 faces (haut, bas, latérale). En appliquant la loi fondamentale de la statique des fluides dans l'eau, incompressible, on trouve rapidement les pressions au-dessus et en-dessous du bouchon, respectivement à des profondeurs $h-e$ et h , d'où le schéma suivant :



Sur les faces inférieure et supérieure, le bouchon est soumis à des pressions uniformes, on en déduit :

$$\vec{F}_{\text{haut}} = -[P_0 + \rho g (h - e)] S \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{bas}} = [(P_0 + \rho g h) (S - S_0) + P_0 S_0] \vec{u}_z$$

Les forces de pression sur la surface latérale (en rouge) s'annihilent par symétrie, et dans tous les cas n'ont pas de composante verticale.

Le bouchon reste plaqué au fond si la projection de la somme des forces suivant $\vec{u}_z$ est négative.

$$-\rho_{\ell} S e g - [P_0 + \rho g (h - e)] S + (P_0 + \rho g h) (S - S_0) + P_0 S_0 < 0$$

Tous les P_0 s'annulent. On simplifie par g et on ré-arrange les termes. Il vient :

$$h > \frac{Se}{S_0} \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_0} \right)$$

On remarque que la condition est automatiquement réalisée ($h > 0$) si $\rho_\ell > \rho_0$, c'est-à-dire si le bouchon coule.

Ex. n°6 • Oscillations d'un bouchon de liège

★★★

0619

1) Notons $M = m + \rho_b HS$ la masse totale du bouchon.

Le bouchon est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède. Un PFD à l'équilibre donne :

$$0 = Mg - \rho_e h S g \Rightarrow h = \frac{M}{\rho_e S} = \frac{m + \rho_b HS}{\rho_e S}$$

2) On applique le PFD au centre de masse du bouchon.

$$M\ddot{z} = Mg - \rho_e (h + z) S g \Rightarrow M\ddot{z} = -\rho_e S g z \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_e S g}{M} z = 0$$

Avec la question précédente, il vient :

$$\ddot{z} + \frac{g}{h} z(t) = 0$$

POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°7 • Piston hydraulique

★★★

1445

1) Pression = force par unité de surface.

$$P_A = \frac{F_{P_1/h}}{\pi D_1^2/4} = 1,9 \times 10^6 \text{ Pa}$$

2) Les points A et B sont à la même altitude, la pression est donc la même.

3) Pression = force par unité de surface.

$$F_{P_1/h} = P_B \times \frac{\pi D_2^2}{4} \Rightarrow F_{h/P_2} = F_{P_1/h} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = 15 \text{ kN}$$

Ex. n°8 • Cluster ballooning

★★★

8604

Système : { homme + N ballons d'hélium }.

Le système est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède des N ballons (la poussée d'Archimède subit par l'homme est négligeable). Pour décoller, il faut que son accélération soit vers le haut.

$$-mg - N\rho_h V_b g + N\rho_a V_b g > 0 \Rightarrow N > \frac{m}{(\rho_a - \rho_h) V} = 36$$

Ex. n°9 • Pression au sommet de l'Éverest

★★★

9354

1) Puisque la température décroît linéairement, on a :

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z}{h}$$

2) On rappelle la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Or, on assimile l'atmosphère à un GP :

$$PV = nRT = \frac{mRT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT} = \frac{MP}{RT_0 + R(T_1 - T_0) \frac{z}{h}}$$

Ainsi,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{MgP}{RT_0 + R(T_1 - T_0) \frac{z}{h}} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -Mg \frac{dz}{RT_0 + R(T_1 - T_0) \frac{z}{h}}$$

On pose $a = RT_0$ et $b = R \frac{T_1 - T_0}{h}$ pour reconnaître l'indication de l'énoncé. On intègre entre $z = 0$ et z quelconque.

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -Mg \int_0^z \frac{dz}{a + bz} \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{b} \ln\left(\frac{a + bz}{a}\right)$$

On passe à l'exponentielle. On rappelle que $e^{xy} = (e^x)^y$. Ainsi,

$$P(z) = P_0 \left(\frac{a + bz}{a} \right)^{-Mg/b} = P_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \times \frac{z}{h} \right)^{-Mg/b} \text{ avec : } \Delta T = T_1 - T_0$$

On évalue cette relation pour $z = h$.

$$P(h) = P_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{-Mg/b}$$

POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°10 • Ascension d'un ballon sonde



2083

1) La résultante de force appliquée au ballon en projection sur (Oz) s'écrit :

$$F_z = \underbrace{-(m + nM_{\text{H}_2})g}_{\text{poids du ballon + contenu}} + \underbrace{V(z)\rho_{\text{air}}(z)g}_{\text{poussée d'Archimède}}$$

Or,

$$V(z)\rho_{\text{air}}(z)g = m_{\text{air}}g = nM_{\text{air}}g$$

ce qui correspond bien à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé. Au final :

$$F_z = \left(n(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2}) - m \right) g$$

2) Le ballon pourra décoller si et seulement si :

$$F_z > 0 \Rightarrow n > n_0 = \frac{m}{M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2}} = 1,85 \times 10^3 \text{ mol}$$

Cela correspond à un volume :

$$V_0 = \frac{n_0 R T_0}{P_0} = 42,0 \text{ m}^3$$

3) Lors de la montée du ballon, la pression diminue donc le volume du ballon augmente car n et T_0 restent constants, le ballon n'éclate pas tant que :

$$V(z) < V_1 \Rightarrow \frac{nRT_0}{P(z)} < V_1 \text{ avec : } P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

On en déduit :

$$z < z_1 = H \ln \left(\frac{n_0 V_1}{n V_0} \right)$$

4) Au dessus de l'altitude z_1 , la soupape impose $V(z) = V_1 = \text{cte}$ et la quantité de dihydrogène $n(z)$ diminue telle que :

$$P(z) V_1 = n(z) R T_0 \Rightarrow n(z) = \frac{P_0 V_1}{R T_0} e^{-z/H}$$

5) On obtient lors de cette deuxième phase d'ascension pour $z > z_1$:

$$F_z = \left(n(z)(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2}) - m \right) g = \left(n(z) \frac{m}{n_0} - m \right) g = mg \left(\frac{n(z)}{n_0} - 1 \right)$$

6) L'altitude ultime atteinte z_2 est telle que :

$$F_z = 0 \Rightarrow n(z_2) = n_0 \Rightarrow z_2 = H \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right)$$

On peut vérifier que :

$$z_1 = H \ln \left(\frac{n_0 V_1}{n V_0} \right) < z_2 = H \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) \text{ car : } \frac{n_0}{n} < 1$$